ΘΕΜΑ 4

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) + 2x = f'(x) + x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = f(x) - x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

ii. $f(x) = e^x + x^2, x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o)), x_o \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

(Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$.

(Μονάδες 7)