ΛΥΣΗ

α) $I+J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

β) Αν θέσουμε στο ολοκλήρωμα $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx$ ως $u=\frac{\pi}{2}-x$ έχουμε ότι

$du=-dx$, για $x=0$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$ και για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$ οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$I=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\eta\mu^2(\frac{\pi}{2}-u)du=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 u du=J$.

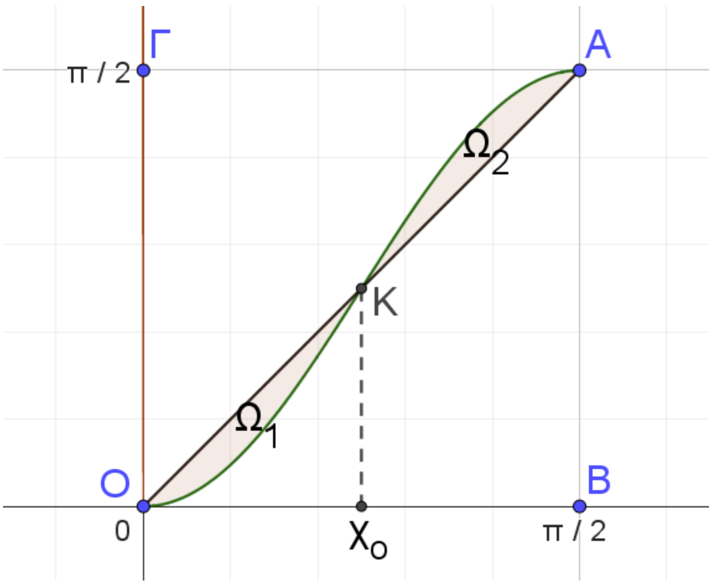
Αφού $I+J=\frac{\pi^2}{4}$ και $I=J$ έχουμε $I+I=\frac{\pi^2}{4}\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi^2}{4}\Leftrightarrow I=\frac{\pi^2}{8}$.

γ)

i. Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα xx' και της ευθείας $x=\frac{\pi}{2}$ είναι το I. Το τετράγωνο ΟΒΑΓ έχει εμβαδόν $\frac{\pi^2}{4}$, οπότε αφού

$$I+J=\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow J=\frac{\pi^2}{4}-I\Rightarrow J=(\mathrm{OBA\Gamma})-I$$

συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy' και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το J.



ii. Η ευθεία ΟΑ έχει εξίσωση $y-0=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{2}-0}\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$ και αφού ΟΑ διαγώνιος του τετραγώνου ΟΒΑΓ, το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή $(\mathrm{OAB})=(\mathrm{OA\Gamma})$. Είναι $I=(\mathrm{OAB})+\mathrm{E}(\Omega_2)-\mathrm{E}(\Omega_1)$, $J=(\mathrm{OA\Gamma})+\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)$ και αφού $I=J$, $(\mathrm{OAB})=(\mathrm{OA\Gamma})$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{E}(\Omega_2)-\mathrm{E}(\Omega_1)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)\Leftrightarrow 2\mathrm{E}(\Omega_2)=2\mathrm{E}(\Omega_1)\Leftrightarrow \mathrm{E}(\Omega_2)=\mathrm{E}(\Omega_1).$$

Εναλλακτικά,

$$\mathrm{E}(\Omega_1)=\mathrm{E}(\Omega_2)\Leftrightarrow \int_0^{x_o}(x-f(x))dx=\int_{x_o}^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-x)dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{x_o}xdx-\int_0^{x_o}f(x)dx=\int_{x_o}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_{x_o}^{\frac{\pi}{2}}xdx\Leftrightarrow \int_0^{x_o}xdx+\int_{x_o}^{\frac{\pi}{2}}xdx=\int_0^{x_o}f(x)dx+\int_{x_o}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\Leftrightarrow\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=I\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{8}=I$$

που ισχύει.

Σημείωση : το K είναι σημείο καμπής της C_f .

Πράγματι, η συνάρτηση $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2x$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=\pi\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu^2x-\pi\cdot\eta\mu^2x$. Είναι

$f''(x)=0\Leftrightarrow\pi\cdot\sigma\upsilon\nu^2x-\pi\cdot\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x$.

Για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ και $\eta\mu x>0$ οπότε

$\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow\varepsilon\phi x=1\overset{x\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}x=\frac{\pi}{4}$. Επίσης

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\pi\cdot\sigma\upsilon\nu^2x-\pi\cdot\eta\mu^2x>0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x>\eta\mu^2x\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x>\eta\mu x\Leftrightarrow\varepsilon\phi x<1\overset{\varepsilon\phi x\uparrow(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}0<x<\frac{\pi}{4}$$

Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, κοίλη στο $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ και παρουσιάζει καμπή για $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Αφού $f(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi}{2}\eta\mu^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ το σημείο καμπής της είναι το $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4})$ που ανήκει στην ευθεία $y=x$ και επομένως είναι το σημείο K.