ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+3$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) i. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+3x+3)=-\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(\ln x+3x+3)=+\infty$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

δηλαδή είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ii. Η εξίσωση γράφεται $f(x)=-2023$ και επειδή ο αριθμός -2023 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση έχει λύση κάποιον αριθμό από το πεδίο ορισμού της f, που είναι το $(0,+\infty)$, επομένως θα είναι θετικός.