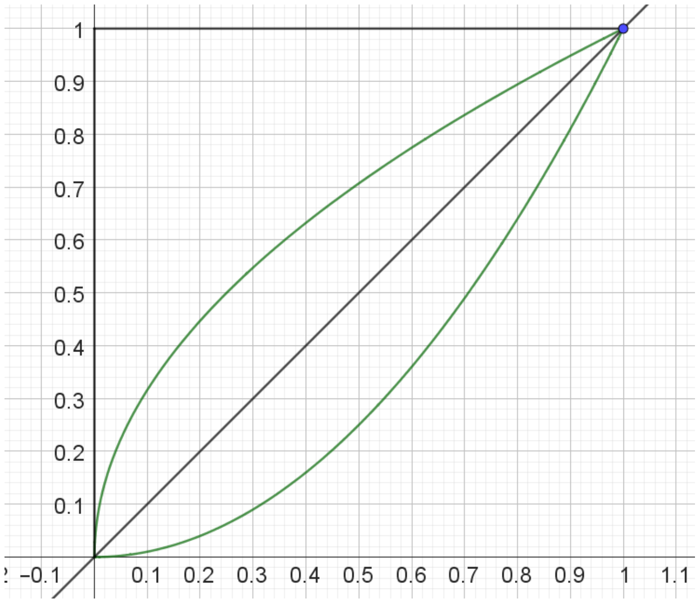
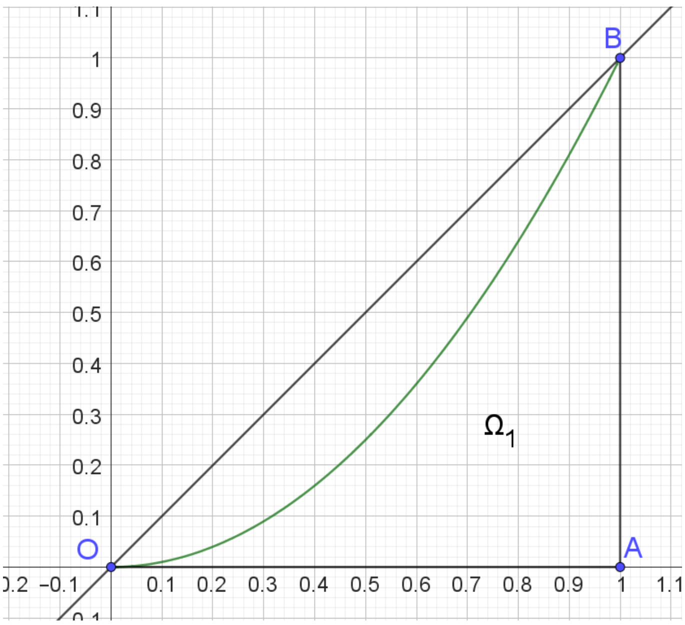
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε είναι αντιστρέψιμη και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της $f$ δηλαδή το $[f(0), f(1)]$ δηλαδή το $[0,1]$.

β) Η γραφική παράσταση της $f^{-1}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $f$ ως προς την ευθεία $y = x$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

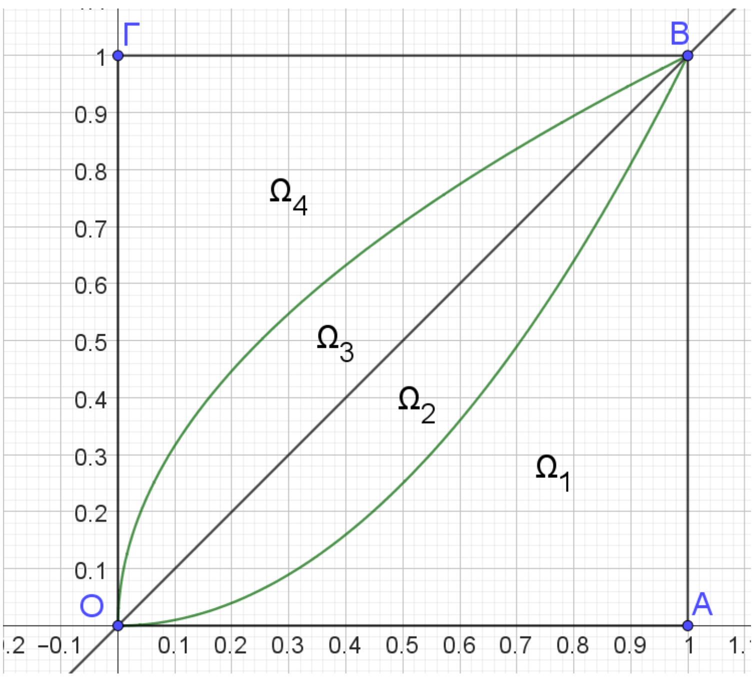



γ) Αν $\Omega_1$ το χωρίο που περικλείεται μεταξύ του άξονα $xx'$ της ευθείας $x = 1$ και της γραφικής παράστασης της $f$, τότε όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα έχουμε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \mathrm{E}(\Omega_1) < (OAB) = \frac{(\mathrm{OA}) \cdot (\mathrm{OB})}{2} = \frac{1}{2}$.



Εναλλακτικά, αφού $f(x) \le x$ για κάθε $x \in [0,1]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και $x=1$, είναι $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

δ) Αν $\Omega_2$ το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της ευθείας $y=x$ και της γραφικής παράστασης της $f$ και $\Omega_3$ το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της ευθείας $y=x$ και της γραφικής παράστασης της $f^{-1}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τότε




i. λόγω συμμετρίας έχουμε ότι : $\mathrm{E}(\Omega_1) = \mathrm{E}(\Omega_4)$ οπότε

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \mathrm{E}(\Omega_1) + \mathrm{E}(\Omega_2) + \mathrm{E}(\Omega_3) = (\mathrm{OAB\Gamma}) - \mathrm{E}(\Omega_4) = (\mathrm{OAB\Gamma}) - \mathrm{E}(\Omega_1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx$$

Εναλλακτικά, πάλι λόγω συμμετρίας έχουμε ότι $\mathrm{E}(\Omega_2) = \mathrm{E}(\Omega_3)$ οπότε

$$\mathrm{E}(\Omega_2) = \mathrm{E}(\Omega_3) \Rightarrow \int_0^1 (f^{-1}(x) - x)dx = \int_0^1 (x - f(x))dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx - \int_0^1 xdx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f^{-1}(x)dx = 2\cdot\int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 2\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f^{-1}(x)dx = 2\cdot\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$$

ii. $\mathrm{E}(\Omega) = (\mathrm{OAB\Gamma}) - \mathrm{E}(\Omega_1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$.