ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι

$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2)}=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$.

β) Η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x=x_o$ και επειδή η $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι

$d'(x_o)=0$. Όμως $d'(x)=\dfrac{2x+2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{x}}{2\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}=\dfrac{x^2+\ln x-2}{x\cdot\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}$ οπότε

$d'(x_o)=0\Rightarrow x_o^2+\ln x_o-2=0\ \ (1)$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y-\ln x_o=\dfrac{1}{x_o}(x-x_o)$.

i. Για να είναι κάθετη στην ΑΜ πρέπει και αρκεί

$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\mathrm{AM}}=-1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_o}\cdot\dfrac{\ln x_o-2}{x_o}=-1\Leftrightarrow\ln x_o-2=-x_o^2\Leftrightarrow x_o^2+\ln x_o-2=0$, που ισχύει από το β).

ii. Για $y=0$ στην εξίσωση της (ε) έχουμε

$0-\ln x_o=\dfrac{1}{x_o}(x-x_o)\Leftrightarrow -x_o\ln x_o=x-x_o\Leftrightarrow x=x_o-x_o\ln x_o\ \ (2)$.

Από την (1) έχουμε ότι $\ln x_o=2-x_o^2$ και έτσι η (2) γίνεται $x=x_o-x_o(2-x_o^2)\Leftrightarrow x=x_o^3-x_o$. Συνεπώς η (ε) τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $\mathrm{B}(x_o^3-x_o,0)$.