ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha$, με $\alpha \neq 0$ είναι:

$$\Delta=\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]^2-4\cdot\alpha\cdot\left(-\alpha\right)=\left(\alpha^2-1\right)^2+4\alpha^2=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=\alpha^4+2\alpha^2+1=\left(\alpha^2+1\right)^2.$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι $\Delta>0$ για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου α , οπότε η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha=0$ έχει δυο ρίζες διαφορετικές, τις:

$$\rho_1=\frac{-\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]+\sqrt{\left(\alpha^2+1\right)^2}}{2\alpha}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)+\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}=\alpha$$

$$\rho_2=\frac{-\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]-\sqrt{\left(\alpha^2+1\right)^2}}{2\alpha}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)-\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}.$$

γ) Έχουμε:

$$\left|\rho_1-\rho_2\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\frac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\alpha^2+1=2\left|\alpha\right|\Leftrightarrow$$

$$\left|\alpha\right|^2-2\left|\alpha\right|+1=0\Leftrightarrow\left(\left|\alpha\right|-1\right)^2=0\Leftrightarrow\left|\alpha\right|-1=0\Leftrightarrow\left|\alpha\right|=1\Leftrightarrow\alpha=\pm1.$$