ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_3=10\\ \alpha_{20}=61\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha_1+2\omega=10\\ \alpha_1+19\omega=61\end{array}\right\}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}17\omega=51\\ \alpha_1+2\omega=10\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\omega=3\\ \alpha_1=4\end{array}\right\}.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu=333\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=333\Leftrightarrow 4+(\nu-1)\cdot 3=333\Leftrightarrow(\nu-1)=\frac{329}{3}\Leftrightarrow\nu=\frac{332}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Συνεπώς ο 333 δεν είναι όρος της προόδου.

γ) Εάν οι x και y είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου (α_ν) και εφόσον $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3x=2y<3y\Leftrightarrow x<y$, θα ισχύει $y=x+3$. Οπότε:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{x+3}{3}\Leftrightarrow 3x=2x+6\Leftrightarrow x=6.$$

Όμως ο $x=6$ δεν μπορεί να είναι όρος της παραπάνω προόδου, αφού

$$\alpha_\nu=6\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=6\Leftrightarrow 4+(\nu-1)\cdot 3=6\Leftrightarrow(\nu-1)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\nu=\frac{5}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου ώστε να ισχύει $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$.