ΛΥΣΗ

α) Αφού $x \in [0, \pi]$ θα έχουμε $\eta\mu x \geq 0$, καθώς η γωνία x βρίσκεται στο $1o$ ή $2o$ τεταρτημόριο.

Επίσης $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 = 1$.

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

β) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $H(x)$ παίρνουμε:

$H'(x) = x' - \frac{(e^x+\eta\mu x)'}{e^x+\eta\mu x} = 1 - \frac{e^x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x} = \frac{e^x+\eta\mu x - e^x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x} = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x} = f(x)$.

γ) Έχουμε $I = \int_0^\pi x f'(x)dx = [xf(x)]_0^\pi - \int_0^\pi x' f(x)dx = \pi f(\pi) - 0f(0) - \int_0^\pi f(x)dx =$

$\pi f(\pi) - [H(x)]_0^\pi = \pi f(\pi) - (H(\pi) - H(0))$.

Αλλά $f(\pi) = \frac{\eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi}{e^\pi + \eta\mu\pi} = \frac{1}{e^\pi}$ και $H(\pi) = \pi - ln(e^\pi + \eta\mu\pi) = \pi - ln(e^\pi) = \pi - \pi = 0$, ενώ

$H(0) = 0 - ln(e^0 + \eta\mu 0) = -ln1 = 0$.

Ώστε $I = \pi f(\pi) = \frac{\pi}{e^\pi}$.

δ) Για κάθε $x \in (0,\pi]$ από α) ερώτημα παίρνουμε $x(e^x + \eta\mu x) \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{x(e^x+\eta\mu x)} \leq \frac{1}{x}$.

Καθώς είναι $1 < e < \pi$, θα έχουμε $\int_1^e \frac{1}{x(e^x+\eta\mu x)} dx < \int_1^e \frac{1}{x} dx = [lnx]_1^e = lne - ln1 = 1$.

Το ίσον δεν ισχύει διότι οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{1}{x(e^x+\eta\mu x)}$ και $t(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ίσες στο διάστημα $[1, e]$, αφού $1 < \frac{\pi}{2} < e$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi\left(1+e^{\pi/2}\right)} \neq t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ κι΄αυτό διότι

$1 + e^{\pi/2} > 1$.