ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ενώ η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $P(x_P, y_P)$, η εξίσωση της οποίας είναι $y - f(x_P) = f'(x_P)(x - x_P)$.

Αφού η τεταγμένη του Σ είναι μηδέν, τότε για την η τετμημένη x_Σ του σημείου Σ θα έχουμε:

$0 - f(x_P) = f'(x_P)(x_\Sigma - x_P)$, άρα

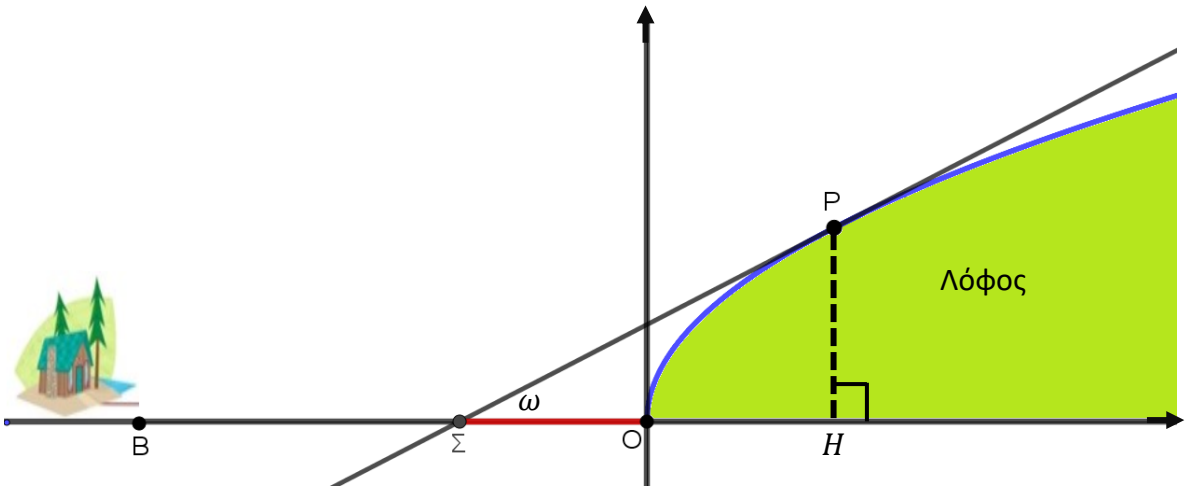
$-\sqrt{x_P} = \frac{1}{2\sqrt{x_P}}(x_\Sigma - x_P) \Leftrightarrow -2x_P = x_\Sigma - x_P \Leftrightarrow x_\Sigma = -x_P$.

Ώστε $x_\Sigma(t) = -x_P(t)$ και $\Sigma(-x_P(t), 0)$.

β) Έστω ότι το σημείο H είναι η προβολή του P στον άξονα $x'x$. Τότε από το σχήμα προκύπτει:

$\varepsilon\varphi(\omega) = \frac{(PH)}{(\Sigma H)} = \frac{y_P}{(\Sigma H)} = \frac{y_P}{2 \cdot x_P} = \frac{\sqrt{x_P}}{2 \cdot x_P} = \frac{1}{2\sqrt{x_P}}$.

Ώστε $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{1}{2\sqrt{x_P(t)}} = \frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$.



γ) Με βάση τα δεδομένα του ερωτήματος, έχουμε $\omega(t_0) = \frac{\pi}{6}$ και $\omega'(t_0) = -\frac{1}{16} rad/min$.

Έτσι, τη χρονική στιγμή t_0 θα έχουμε ότι: $\varepsilon\varphi\big(\omega(t_0)\big) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x_P(t_0)}} \Leftrightarrow x_P(t_0) = \frac{3}{4}$.

Το μήκος της σκιάς $O\Sigma$ είναι $(O\Sigma) = |x_\Sigma| = |-x_P| = x_P$.

Ώστε $(O\Sigma)(t) = x_P(t)$.

Έτσι, ζητάμε τον αριθμό $x_P{}'(t_0)$.

Παραγωγίζοντας ως προς t την ισότητα $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$ παίρνουμε:

$$\omega'(t) \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = -\frac{1}{4}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{3}{2}} x_P{}'(t) \Leftrightarrow \omega'(t) \cdot (1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)) = -\frac{1}{4}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{3}{2}} \cdot x_P{}'(t).$$

Θέτοντας όπου t το t_0, έχουμε: $-\frac{1}{16}\left[1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot x_P{}'(t_0)$.

Ώστε $\frac{4}{12} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} x_P'(t_0) \Leftrightarrow x_P'(t_0) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}\, m/min.$