Λύση

α) Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=2+\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\Re$. Επομένως $f\nearrow$, δηλαδή είναι 1-1, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}$.

β)

i. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+1$. Ακόμα $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=2$.

Άρα η εφαπτομένη $(\varepsilon)$ της $C_f$: $y-(\pi+1)=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=2x+1$.

ii. Θα βρούμε τα κοινά σημεία της $C_f$ και $(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} y=2x+\eta\mu x \\ y=2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+1=2x+\eta\mu x \\ y=2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \eta\mu x=1 \\ y=2x+1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ y=4k\pi+\pi+1 \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Δηλαδή η εφαπτομένη και η $C_f$ έχουν άπειρα κοινά σημεία τα

$\mathrm{M}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},4k\pi+\pi+1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Για αυτά τα σημεία είναι $f'\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2$, δηλαδή η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της $C_f$ σε όλα τα κοινά σημεία, καθώς

$$\begin{aligned} &y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow \\ &y-(2x_0+1)=2(x-x_0)\Leftrightarrow \\ &y-2x_0-1=2x-2x_0\Leftrightarrow \\ &y=2x+1 \end{aligned}$$

γ)

i. Είναι $f'(x)=2+\sigma\upsilon\nu x$ άρα $|2+\sigma\upsilon\nu x|\le|2|+|\sigma\upsilon\nu x|\le 2+1=3$, επομένως $|f'(x)|\le 3$.

ii. Στο $[\alpha,\beta]$ η $f$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Στο $(\alpha,\beta)$ παραγωγίσιμη με $|f'(x)|\le 3$, λόγω γ)i.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Οπότε έχουμε $\left|f'(\xi)\right| \le 3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \le 3 \Leftrightarrow \left|f(\beta)-f(\alpha)\right| \le 3\left|\beta-\alpha\right|$.