ΛΥΣΗ

α) Από τον τρόπο που ορίστηκε η $g$ προκύπτει ότι έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $[-\frac{1}{2},1)$ της $f$ και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ της $f$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της αντίστροφης, για να δείξουμε ότι η $g$ είναι η αντίστροφη της $f$ αρκεί να δείξουμε την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$.

Για $x\in[0,+\infty)$ και $y\in[-\frac{1}{2},1)$ έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}+2-3=y(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=y\sqrt{x}+2y \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}-y\sqrt{x}=1+2y \Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x}=1+2y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1+2y}{1-y} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2$$

$\Leftrightarrow g(y)=x$,

όπου $\frac{1+2y}{1-y}\geq 0$ για $y\in[-\frac{1}{2},1)$.

Επομένως η $g$ είναι η αντίστροφη της $f$.

β) Για $x\in[0,1)$ έχουμε: $f(x)=1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}<0$ (γιατί $\sqrt{x}-1<0$ και $\sqrt{x}+2>0$)

ενώ $g(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2>0$.

γ) Για να δείξουμε ότι οι $C_f$, $C_g$ δεν έχουν κοινά σημεία αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$f(x)=g(x)$, $x\in D_f\cap Dg=[0,1)$ είναι αδύνατη.

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x)<0$ και $g(x)>0$, $x\in[0,1)$.

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη και οι $C_f$, $C_g$ δεν έχουν κοινά σημεία.