ΛΥΣΗ

α)

Από υπόθεση έχουμε: $F'(x) = f(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι ρίζες της $f$ είναι οι $x = 0,\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της $F$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F' = f$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | | | Τ.Ε. | | Τ.Μ. | | Τ.Ε. | | |

β) Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η καμπύλη $C_3$ παρουσιάζει την μονοτονία και τα ακρότατα της $F$, σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών του ερωτήματος (α), επομένως η $C_3$ είναι η γραφική παράσταση της $F$ και η $C_1$ είναι η γραφική παράσταση της $f\,'$.

γ) Η παράγωγος $f\,'$ της $f$ έχει τύπο $f\,'(x) = 12x^2 - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για την $F$ έχουμε: $F'(x) = f(x) = 4x^3 - 2x = (x^4 - x^2)'$ επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) = x^4 - x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση $C_3$ της $F$ επομένως $F(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Τελικά $F(x) = x^4 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.