ΛΥΣΗ

α) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,2]$, είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, με $f'(x) = 4x^3 - 4$ για κάθε $x \in [0,2]$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Επομένως, η f έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, το $x_0 = 1$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και του ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα του διαστήματος.
- Από αυτές τις τιμές, η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

Οι τιμές της f στο κρίσιμο σημείο της $x_0 = 1$ και στα άκρα του διαστήματος $[0,2]$ είναι

$$f(1) = -1,\ f(0) = 2 \ \text{ και } \ f(2) = 10.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο $[0,2]$ είναι ίση με 10 και η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,2]$ είναι ίση με -1.