ΛΥΣΗ

α) i. Για κάθε $x \in [-1,+\infty)$ είναι:

$$\left(f(x)+x\right)^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow g^2(x) = x^2(x+1) \Leftrightarrow |g(x)| = |x|\sqrt{x+1}\,.$$

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow |g(x)|=0 \Leftrightarrow |x|\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

ii. Η συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) $g(x)$ είναι μη μηδενιζόμενη σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0),(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα $(-1,0),(0,+\infty)$. Ακόμη είναι $g(1)=f(1)+1>0$ και $g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}<0$ αφού $f(1)>-1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$. Οπότε είναι $g(x)<0$ για κάθε $x\in[-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Για $x\in(0,+\infty)$ είναι $|g(x)|=g(x)$ και $|x|=x$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} g(x)=x\sqrt{x+1} &\Leftrightarrow f(x)+x=x\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow f(x)=x\sqrt{x+1}-x \\ &\Leftrightarrow f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right) \end{aligned}$$

Για $x\in(-1,0)$ είναι $|g(x)|=-g(x)$ και $|x|=-x$, έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} -g(x)=-x\sqrt{x+1} &\Leftrightarrow g(x)=x\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right) \end{aligned}$$

Ακόμη είναι $f(0)=0\cdot\left(\sqrt{0+1}-1\right)=0$ και $f(-1)=-1\cdot\left(\sqrt{-1+1}-1\right)=1$ άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ για κάθε $x\geq -1$.

γ) Η συνεχής συνάρτηση f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Ακόμη είναι $h'(x)=f'(x+1)\cdot(x+1)'-f'(x)=f'(x+1)-f'(x)$.

Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $x<x+1 \Rightarrow f'(x)<f'(x+1) \Rightarrow f'(x+1)-f'(x)>0 \Rightarrow h'(x)>0$ άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x\in[2023,2024]$ είναι $x<x+1$ άρα $h(x)<h(x+1)$.

Επιπλέον οι $h(x)$, $h(x+1)$ είναι συνεχείς άρα ισχύει:

$$\int_{2023}^{2024} h(x)dx < \int_{2023}^{2024} h(x+1)dx \Rightarrow \int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx < \int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx\,.$$