ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και "$1-1$".

Έτσι η εξίσωση $f(x) = 0$ γράφεται $f(x) = f(1)$ άρα $x = 1$.

β) Για κάθε $x > 1$, έχουμε $g'(x) = \frac{(lnx)\prime}{lnx} = \frac{1}{xlnx}$.

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(e, g(e))$, είναι $g'(e) = \frac{1}{elne} = \frac{1}{e}$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $f'(x_0) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} + \frac{1}{{x_0}^2} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow {x_0}^2 - ex_0 - e = 0$, εξίσωση που έχει ως λύση τον αριθμό $x_0 = \frac{e+\sqrt{e^2+4e}}{2}$, αφού $\frac{e-\sqrt{e^2+4e}}{2} < 0$, καθώς $e = \sqrt{e^2} < \sqrt{e^2 + 4e}$.

γ) Έχουμε $x'(t) = 2\ cm/sec$ κάθε χρονική στιγμή t, ενώ $x(t_0) = e^2$.

Για το εμβαδόν του τριγώνου $ΟΒΓ$ έχουμε:

$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OΓ})\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x & f(x) \\ x & g(x) \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|x\big(g(x) - f(x)\big)\right| = \frac{1}{2}x(f(x) - g(x))$, αφού γνωρίζουμε ότι $g(x) < f(x)$.

Ώστε $E(t) = \frac{1}{2}x(t)[f(x(t)) - g(x(t))]$.

Άρα $E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)[f(x(t)) - g\big(x(t)\big)] + \frac{1}{2}x(t)x'(t)\big[f'\big(x(t)\big) - g'(x(t))\big]$, οπότε

$E'(t_o) = \frac{1}{2} \cdot 2[f(e^2) - g(e^2)] + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^2[f'(e^2) - g'(e^2)] =$

$= \left(3 - \frac{1}{e^2} - ln2\right) + e^2\left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} - \frac{1}{2e^2}\right) = \frac{7}{2} - ln2\ cm^2$/sec.