ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}>0$ για κάθε $x>0$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty \right)$, άρα είναι και $"1-1"$.

Έτσι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ γράφεται $f\left(x\right)=f(1)$ άρα $x=1$.

β) Για κάθε $x>1$, έχουμε $g^{'}\left(x\right)=\frac{(lnx)'}{lnx}=\frac{1}{xlnx}$.

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της $g$ στο σημείο $\left(e,g(e)\right)$, είναι $g^{'}\left(e\right)=\frac{1}{elne}=\frac{1}{e}$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει $x\_{0}>0$ ώστε $f^{'}\left(x\_{0}\right)=\frac{1}{e}⇔\frac{1}{x\_{0}}+\frac{1}{x\_{0}^{2}}=\frac{1}{e}⇔x\_{0}^{2}-ex\_{0}-e=0$, εξίσωση που έχει ως λύση τον αριθμό $x\_{0}=\frac{e+\sqrt{e^{2}+4e}}{2}$, αφού $\frac{e-\sqrt{e^{2}+4e}}{2}<0$, καθώς

 $e=\sqrt{e^{2}}<\sqrt{e^{2}+4e}$.

γ) Έχουμε $x^{'}\left(t\right)=2 cm/sec$ κάθε χρονική στιγμή $t$, ενώ $x\left(t\_{0}\right)=e^{2}$.

Για το εμβαδόν του τριγώνου $ΟΒΓ$ έχουμε:

$\left(ΟΒΓ\right)=\frac{1}{2}\left|det⁡(\vec{OB}, \vec{ΟΓ})\right|=\frac{1}{2}\left|\left|\begin{matrix}x&f\left(x\right)\\x&g\left(x\right)\end{matrix}\right|\right|=\frac{1}{2}\left|x\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)\right|=$ $\frac{1}{2}x(f\left(x\right)-g\left(x\right))$, αφού γνωρίζουμε ότι $g\left(x\right)<f(x)$.

Ώστε $E\left(t\right)=\frac{1}{2}x(t)\left[f\left(x(t)\right)-g\left(x(t)\right)\right]$*.*

Άρα $E^{'}\left(t\right)=\frac{1}{2}x^{'}\left(t\right)[f\left(x(t)\right)-g\left(x\left(t\right)\right)]+\frac{1}{2}x(t)x'(t)\left[f^{'}\left(x\left(t\right)\right)-g'(x\left(t\right))\right]$, οπότε

$E^{'}\left(t\_{o}\right)=\frac{1}{2}∙2\left[f\left(e^{2}\right)-g\left(e^{2}\right)\right]+\frac{1}{2}∙2∙e^{2}\left[f^{'}\left(e^{2}\right)-g^{'}\left(e^{2}\right)\right]=$

$=\left(3-\frac{1}{e^{2}}-ln2\right)+e^{2}\left(\frac{1}{e^{2}}+\frac{1}{e^{4}}-\frac{1}{2e^{2}}\right)= \frac{7}{2}-ln2$ $cm^{2}$/sec.