

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

(Μονάδες 7)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε) .

(Μονάδες 8)

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$, $\Gamma(x, g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$.

(Μονάδες 10)