ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+x+1) = 1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 + \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{(lnx)^2}{x}\right] = 1 + 0 = 1.$

Ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, άρα f συνεχής στο 1.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^2+x+1-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x) = -1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(lnx)^2}{x(x-1)}\ \left(\alpha\pi\rho o\sigma\delta.\frac{0}{0}\right).$

Ελέγχουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{[(lnx)^2]'}{(x^2-x)'} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2lnx\cdot\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2lnx}{2x^2-x} = 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0.$

Ώστε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Από α) ερώτημα, προκύπτει ότι ένα κρίσιμο σημείο είναι το $x_0 = 1$.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[-1,+\infty)$ στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται.

Έχουμε $f'(x) = \begin{cases} -2x+1, & -1 \le x < 1 \\ \frac{lnx(2-lnx)}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$

διότι $\left[\frac{(lnx)^2}{x}\right]' = \frac{((lnx)^2)'x-(lnx)^2x'}{x^2} = \frac{2lnx\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(lnx)^2}{x^2} = \frac{2lnx-(lnx)^2}{x^2}$ και

$(-x^2+x+1)' = -2x+1.$

Παρατηρούμε ότι για $-1 < x < 1$, έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ δεκτό, ενώ για $x > 1$, έχουμε $lnx > 0$, άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e^2 > 1$, δεκτό.

Ώστε υπάρχουν τρία κρίσιμα σημεία, τα $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$ και $x_2 = e^2$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x \in [1,e]$, έχουμε:

$x \ge 1 \Leftrightarrow -x \le -1$. Άρα $e^{-x} \le e^{-1} < e^0 = 1 \le 1 + \frac{(lnx)^2}{x}$.

Ώστε $e^{-x} < 1 + \frac{(lnx)^2}{x} = f(x)$, για κάθε $x \in [1,e]$.

Ώστε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E = \int_1^e \left[1 + \frac{(lnx)^2}{x} - e^{-x}\right]dx = e - 1 + \int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx - \int_1^e e^{-x}dx =$

$e - 1 + \frac{1}{3} - (-e^{-e} + e^{-1}) = e - \frac{2}{3} + \frac{1}{e^e} - \frac{1}{e} = \frac{e^{e+1}-e^{e-1}+1}{e^e} - \frac{2}{3}$, διότι για τον υπολογισμό του

$I_1 = \int_1^e \frac{(lnx)^2}{x} dx$, θέτουμε $u = lnx$, άρα $du = (lnx)' dx = \frac{1}{x} dx$, οπότε $I_1 = \int_{ln1}^{lne} u^2 du = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, ενώ $\int_1^e e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^e = -e^{-e} + e^{-1}$.