ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = [(x^2-4x+6)e^x]' = (2x-4)e^x + (x^2-4x+6)e^x = (x^2-2x+2)e^x > 0$, εφόσον

$x^2-2x+2>0$, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ = -4 < 0.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λόγω της μονοτονίας της f και της συνέχειάς της, το

$f(A) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (0,\ +\infty)$,

γιατί: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x+6)e^x \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+6}{e^{-x}} \underset{dL'H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-4x+6)'}{(e^{-x})'} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{-e^{-x}} \underset{dL'H}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-4)'}{(-e^{-x})'} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 2\cdot 0 = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+6)e^x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ$(0,\ f(0))$ είναι:

(ε): $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ ή (ε): $y-6=2x$ ή (ε): $y = 2x+6$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$f''(x) = [(x^2-2x+2)e^x]' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2e^x \ge 0$, με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν εμφανίζει σημεία καμπής.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε η εφαπτομένη της (ε) θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους Μ. Επομένως θα ισχύει $f(x)\ge 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.