ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x\eta\mu x+4)'=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

οπότε: $f'(0)=0$ και $f'(\frac{\pi}{2})=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$

έχουμε: $\varphi(0)=f'(0)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0$ και $\varphi(\frac{\pi}{2})=f'(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι

συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ ως άθροισμα συνεχών.

Λόγω του ερωτήματος (β) είναι: $\left.\begin{array}{l}\varphi(0)<0\\ \varphi(\frac{\pi}{2})>0\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi(0)\cdot\varphi(\frac{\pi}{2})<0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\frac{\pi}{2}):\varphi(x_0)=0$.

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$.