

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\eta\mu x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$\varphi(0) < 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)