

ΛΥΣΗ

α) Είναι  $L = AB + B\Gamma$ . Από την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε ότι:

$$AB^2 = \Delta B^2 + \Delta A^2 = x^2 + (1,5)^2 = x^2 + 2,25 \quad \text{και} \quad B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = (1,7-x)^2 + \alpha^2. \quad \text{Άρα είναι}$$

$$AB = \sqrt{x^2 + 2,25}, \quad B\Gamma = \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2} \quad \text{και} \quad L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}.$$

β) Είναι  $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7-x)^2}{(1,7-x)^2 + \alpha^2}}, \quad x \in \left(0, \frac{17}{10}\right).$

i. Γνωρίζουμε ότι το  $L$  γίνεται ελάχιστο όταν το  $B$  απέχει 1,02 μέτρα από το  $\Delta$ . Επειδή

$1,02 \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ , η συνάρτηση  $L$  είναι παραγωγίσιμη στο 1,02 και το  $L(1,02)$  είναι

τοπικό ακρότατο (ως ελάχιστη τιμή) από το θεώρημα Fermat έπεται ότι  $L'(1,02) = 0$ .

Είναι

$$\begin{aligned} L'(1,02) = 0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{(1,02)^2}{(1,02)^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7-1,02)^2}{(1,7-1,02)^2 + \alpha^2}} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{(1,02)^2}{(1,02)^2 + 2,25}} = \sqrt{\frac{(0,68)^2}{(0,68)^2 + \alpha^2}} \\ &\Rightarrow \frac{(1,02)^2}{(1,02)^2 + 2,25} = \frac{(0,68)^2}{(0,68)^2 + \alpha^2} \\ &\Rightarrow (1,02)^2 \cdot (0,68)^2 + (1,02)^2 \alpha^2 = (1,02)^2 \cdot (0,68)^2 + 2,25 \cdot (0,68)^2 \\ &\Rightarrow (1,02)^2 \alpha^2 = 2,25 \cdot (0,68)^2 \\ &\Rightarrow 1,02\alpha = 1,5 \cdot 0,68 \\ &\Rightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

ii. Επειδή  $L''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ , η συνάρτηση  $L'$  είναι γνησίως αύξουσα.

Ακόμη η  $L'$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και από το θεώρημα Fermat είναι

$L'(1,02) = 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1,02} L'(x) = L'(1,02) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1,02^-} L'(x) = \lim_{x \rightarrow 1,02^+} L'(x) = 0.$$

Για  $x \in (1,02, 1,7)$  είναι  $x > 1,02 \Rightarrow L'(x) > L'(1,02) \Rightarrow L'(x) > 0$  και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 1,02^+} L'(x) = 0 \quad \text{έπεται ότι} \quad \lim_{x \rightarrow 1,02^+} \frac{1}{L'(x)} = +\infty.$$

Για  $x \in (0, 1,02)$  είναι  $x < 1,02 \Rightarrow L'(x) < L'(1,02) \Rightarrow L'(x) < 0$  και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 1,02^-} L'(x) = 0 \text{ \u0395\u03c0\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03cc\u03c4\u03b9 } \lim_{x \rightarrow 1,02^-} \frac{1}{L'(x)} = -\infty.$$

\u0395\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9  $\lim_{x \rightarrow 1,02^+} \frac{1}{L'(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 1,02^-} \frac{1}{L'(x)}$  \u0391\u03c1\u03b1 \u03c4\u03cc \u03cc\u03c1\u03b9\u03cc  $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$  \u0394\u03b5\u03bd \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03b5\u03b9.

**\u03a3\u03c7\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1:**

- \u0395\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9

$$\begin{aligned} L'(x) &= \left( \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2,25}} \cdot (x^2 + 2,25)' + \frac{1}{2\sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}} \cdot \left( (1,7-x)^2 + \alpha^2 \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2,25}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}} \cdot 2(1,7-x)(1,7-x)' \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2,25}} - \frac{1,7-x}{\sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7-x)^2}{(1,7-x)^2 + \alpha^2}} \end{aligned}$$

- \u039c\u03b5 \u0398\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 Fermat \u03c3\u03c4\u03b7 \u03b3\u03b5\u03c9\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1: \u0395\u03bb\u03ac\u03c7\u03b9\u03c3\u03c4\u03b7 \u03c4\u03b9\u03bc\u03b7 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03c4\u03b7\u03bd  $L$  \u03b5\u03c0\u03b9\u03c4\u03c5\u03c7\u03ac\u03bd\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03c4\u03cc  $B$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03cc \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03cc \u03c4\u03cc\u03bc\u03b7\u03c2 \u03c4\u03cc\u03c5  $\Gamma A'$  \u03bc\u03b5 \u03c4\u03cc  $\Delta E$ , \u03cc\u03c0\u03c5  $A'$  \u03c4\u03cc \u03c3\u03c5\u03bc\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03ba\u03cc \u03c4\u03cc\u03c5  $A$  \u03c9\u03c2 \u03c0\u03c1\u03cc\u03c2 \u03c4\u03b7\u03bd  $\Delta E$  (\u03b2\u03b9\u03b2\u03bb\u03b9\u03cc \u03b3\u03b5\u03c9\u03bc\u03b5\u03c4\u03c1\u03b9\u03b1\u03c2 \u03b1' \u03bb\u03c5\u03ba\u03b5\u03b9\u03cc\u03c5, \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03b3\u03c1\u03b1\u03c6\u03cc\u03c2 3.12, \u03b5\u03c6\u03b1\u03c1\u03bc\u03cc\u03b3\u03b7 4).