ΛΥΣΗ

α) Είναι $L=\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}$. Από τ την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε ότι: $\mathrm{AB}^2=\Delta\mathrm{B}^2+\Delta\mathrm{A}^2=x^2+(1{,}5)^2=x^2+2{,}25$ και $\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{BE}^2+\mathrm{E\Gamma}^2=(1{,}7-x)^2+\alpha^2$. Άρα είναι $\mathrm{AB}=\sqrt{x^2+2{,}25}$, $\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}$ και $L=L(x)=\sqrt{x^2+2{,}25}+\sqrt{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}$.

β) Είναι $L'(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+2{,}25}}-\sqrt{\dfrac{(1{,}7-x)^2}{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}}$, $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$.

i. Γνωρίζουμε ότι το L γίνεται ελάχιστο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ. Επειδή $1{,}02\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$, η συνάρτηση L είναι παραγωγίσιμη στο $1{,}02$ και το $L(1{,}02)$ είναι τοπικό ακρότατο (ως ελάχιστη τιμή) από το θεώρημα Fermat έπεται ότι $L'(1{,}02)=0$.

Είναι

$$
\begin{aligned}
L'(1{,}02)=0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{(1{,}02)^2}{(1{,}02)^2+2{,}25}}-\sqrt{\frac{(1{,}7-1{,}02)^2}{(1{,}7-1{,}02)^2+\alpha^2}}=0\\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{(1{,}02)^2}{(1{,}02)^2+2{,}25}}=\sqrt{\frac{(0{,}68)^2}{(0{,}68)^2+\alpha^2}}\\
&\Rightarrow \frac{(1{,}02)^2}{(1{,}02)^2+2{,}25}=\frac{(0{,}68)^2}{(0{,}68)^2+\alpha^2}\\
&\Rightarrow (1{,}02)^2\cdot(0{,}68)^2+(1{,}02)^2\alpha^2=(1{,}02)^2\cdot(0{,}68)^2+2{,}25\cdot(0{,}68)^2\\
&\Rightarrow (1{,}02)^2\alpha^2=2{,}25\cdot(0{,}68)^2\\
&\Rightarrow 1{,}02\alpha=1{,}5\cdot 0{,}68\\
&\Rightarrow \alpha=1
\end{aligned}
$$

ii. Επειδή $L''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$, η συνάρτηση L' είναι γνησίως αύξουσα.

Ακόμη η L' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και από το θεώρημα Fermat είναι $L'(1{,}02)=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1{,}02} L'(x)=L'(1{,}02)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1{,}02^-} L'(x)=\lim_{x\to 1{,}02^+} L'(x)=0.$$

Για $x\in(1{,}02\,,\,1{,}7)$ είναι $x>1{,}02\Rightarrow L'(x)>L'(1{,}02)\Rightarrow L'(x)>0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 1{,}02^+} L'(x)=0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 1{,}02^+}\dfrac{1}{L'(x)}=+\infty$.

Για $x \in (0\ ,\ 1{,}02)$ είναι $x < 1{,}02 \Rightarrow L'(x) < L'(1{,}02) \Rightarrow L'(x) < 0$ και επειδή $\lim\limits_{x \to 1{,}02^-} L'(x) = 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{x \to 1{,}02^-} \dfrac{1}{L'(x)} = -\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 1{,}02^+} \dfrac{1}{L'(x)} \neq \lim\limits_{x \to 1{,}02^-} \dfrac{1}{L'(x)}$ άρα το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \dfrac{1}{L'(x)}$ δεν υπάρχει.

Σχόλια:

- Είναι

$$
\begin{aligned}
L'(x) &= \left(\sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2} \right)' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2{,}25}} \cdot \left(x^2 + 2{,}25 \right)' + \frac{1}{2\sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}} \cdot \left((1{,}7 - x)^2 + \alpha^2 \right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2{,}25}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}} \cdot 2(1{,}7 - x)(1{,}7 - x)' \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2{,}25}} - \frac{1{,}7 - x}{\sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}} \\
&= \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2{,}25}} - \sqrt{\frac{(1{,}7 - x)^2}{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}}
\end{aligned}
$$

- Το θεώρημα Fermat στη γεωμετρία: Ελάχιστη τιμή για την L επιτυγχάνεται το B είναι το σημείο τομής του $\Gamma\mathrm{A}'$ με το $\Delta\mathrm{E}$, όπου A' το συμμετρικό του A ως προς την $\Delta\mathrm{E}$ (βιβλίο γεωμετρίας α’ λυκείου, παράγραφος 3.12, εφαρμογή 4).