ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi,\pi]$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $\phi'(x)=-x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x$.

Είναι $\phi'(\pi)=\phi'(-\pi)=\phi'(0)=0$.

Για $x\in(-\pi,0)$ είναι $x<0$ και $\eta\mu x<0$ οπότε $\phi'(x)<0$.

Για $x\in(0,\pi)$ είναι $x>0$ και $\eta\mu x>0$ οπότε $\phi'(x)<0$.

Συνεπώς $\phi'(x)\le 0$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και $\phi'(x)=0$ για $x=\pi$ ή $x=-\pi$ ή $x=0$.

Συνεπώς η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$.

Για $x\in(-\pi,0)$ είναι $x<0$ οπότε $\phi(x)>\phi(0)\Leftrightarrow\phi(x)>0$.

Για $x\in(0,\pi)$ είναι $x>0$ οπότε $\phi(x)<\phi(0)\Leftrightarrow\phi(x)<0$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi,0),(0,\pi]$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Για $x\in(-\pi,0)$ είναι $\phi(x)>0$ και άρα και $f'(x)>0$.

Για $x\in(0,\pi)$ είναι $\phi(x)<0$ και άρα και $f'(x)<0$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0)=1$ και ολικό ελάχιστο στο –π και στο π το $f(-\pi)=f(\pi)=0$.

γ) Η ισότητα $\int_0^\kappa \phi(x)dx=0$ αληθεύει για $\kappa=0$ αφού $\int_0^0 \phi(x)dx=0$.

Αν $\kappa\in(0,\pi)$ τότε αφού για $x\in(0,\pi)$ είναι $\phi(x)<0$, είναι και $\int_0^\kappa \phi(x)dx<0$.

Αν $\kappa\in(-\pi,0)$ τότε αφού για $x\in(-\pi,0)$ είναι $\phi(x)>0$, είναι και

$\int_0^\kappa \phi(x)dx=-\int_\kappa^0 \phi(x)dx<0$.

Συνεπώς η μοναδική τιμή του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για την οποία ισχύει $\int_0^\kappa \phi(x)dx=0$ είναι η $\kappa=0$.