ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή.

β) Η f είναι κυρτή οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης $f'(1)=e-1>0$ και $f'(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0$.

Από θεώρημα Bolzano για την συνεχή f' στο $[\frac{1}{2},1]$ υπάρχει $x_o\in(\frac{1}{2},1)$ με $f'(x_o)=0$ και λόγω μονοτονίας της f' μοναδικό.

Επίσης, αφού f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, έχουμε ότι για κάθε $0<x<x_o$ είναι $f'(x)<f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_o]$, ενώ για κάθε $x>x_o$ είναι $f'(x)>f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_o,+\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει ένα ακριβώς ακρότατο και μάλιστα ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o\in(\frac{1}{2},1)$.

γ) Είναι $f'(x_o)=0\Leftrightarrow e^{x_o}-\frac{1}{x_o}=0\Leftrightarrow e^{x_o}=\frac{1}{x_o}\Leftrightarrow x_o=\ln\frac{1}{x_o}\Leftrightarrow x_o=-\ln x_o$.

Το ολικό ελάχιστο είναι το $f(x_o)=e^{x_o}-\ln x_o$. Δείξαμε παραπάνω ότι $e^{x_o}=\frac{1}{x_o}$ και $x_o=-\ln x_o$ οπότε $f(x_o)=e^{x_o}-\ln x_o=\frac{1}{x_o}+x_o$.

δ) Είναι $\frac{1}{x_o}+x_o>2$ αφού

$\frac{1}{x_o}+x_o>2\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}+x_o-2>0\Leftrightarrow\frac{x_o^2-2x_o+1}{x_o}>0\Leftrightarrow\frac{(x_o-1)^2}{x_o}>0$ που ισχύει αφού $x_o\in(\frac{1}{2},1)$ οπότε $x_o>0$ και $x_o\neq1$.

Συνεπώς $f(x)\geq f(x_o)>2$ που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη.