Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Είναι

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=e$ το $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$.

β) Επειδή $e<2022<2023$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ είναι

$$\begin{aligned}
&f(2022)>f(2023) \Leftrightarrow \\
&\frac{\ln 2022}{2022}>\frac{\ln 2023}{2023} \Leftrightarrow \\
&2023\ln 2022>2022\ln 2023 \Leftrightarrow \\
&\ln 2022^{2023}>\ln 2023^{2022} \Leftrightarrow \\
&2022^{2023}>2023^{2022}
\end{aligned}$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f''(x)=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{2x\ln x-3x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e^3}$ και

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x-3}{x^3}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x>\sqrt{e^3}$.

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $(0,\sqrt{e^3}]$, κυρτή στο $[\sqrt{e^3},+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή για $x=\sqrt{e^3}$. Επειδή $f(\sqrt{e^3})=\dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}$ το σημείο καμπής είναι το $(\sqrt{e^3},\dfrac{3}{2\sqrt{e^3}})$.

δ) Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[2021,2022]$ υπάρχει $\xi_1\in(2021,2022)$ με $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2022)-f(2021)}{2022-2021}=f(2022)-f(2021)$.

Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[2022,2023]$ υπάρχει $\xi_2\in(2022,2023)$ με $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2023)-f(2022)}{2023-2022}=f(2023)-f(2022)$.

Επειδή $\sqrt{e^3}<2021<\xi_1<2022<\xi_2$ και f' γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e^3},+\infty)$ είναι

$$\begin{aligned}&f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow\\&f(2022)-f(2021)<f(2023)-f(2022)\Rightarrow\\&2f(2022)<f(2023)+f(2021)\end{aligned}$$