ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα του σχήματος προκύπτει ότι $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha<0$ και $f'(0)=0$, οπότε $\gamma=0$. Η συνάρτηση f' παρουσιάζει μέγιστο για $x=2$, οπότε $f''(2)=0$. Είναι: $f''(x)=2\alpha x+\beta$ και

$$f''(2)=0\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=0, (1)$$

Επιπλέον, $f'(2)=2\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=2$, (2).

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) παίρνουμε $\beta=2$ και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha=-\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Από το ερώτημα α) συμπεραίνουμε ότι $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, οπότε $c=1$.

Άρα $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$x^2+x+1-\eta\mu x>-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$$

που γράφεται

$$\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x,\ x\geq 0$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $h'(x)=\frac{1}{2}x^2+1-\sigma\upsilon\nu x$ και $h'(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$h(x)>h(0)\Rightarrow\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$$

που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να γράψουμε:

Για οποιοδήποτε θετικό αριθμό x έχουμε:

$$|\eta\mu x|<x\Rightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0$$

και επειδή με $x>0$ ισχύει $\frac{1}{6}x^3>0$. Άρα, $\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$ είναι ίσο με $\int_0^{\pi} h(x)dx$. Είναι:

$$\int_0^{\pi} h(x)dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{6}x^3 + x - \eta\mu x\right)dx = \left[\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{2} - 1 - 1 = \frac{\pi^4 + 12\pi^2 - 48}{24}$$