ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα του σχήματος προκύπτει ότι και , οπότε . Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για , οπότε . Είναι: και

Επιπλέον, , (2).

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) παίρνουμε και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε . Έτσι έχουμε .

β) Από το ερώτημα α) συμπεραίνουμε ότι και , οπότε .

Άρα .

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ισχύει

που γράφεται

Θεωρούμε τη συνάρτηση .

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με και με την ισότητα να ισχύει μόνο για . Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε έχουμε:

που είναι το ζητούμενο.

**Εναλλακτικά** θα μπορούσαμε να γράψουμε:

Για οποιοδήποτε θετικό αριθμό x έχουμε:

και επειδή με ισχύει . Άρα, .

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις και τις ευθείες και είναι ίσο με . Είναι: