ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = -4\frac{-1}{x^4}\cdot 2x = \frac{8}{x^3} \text{ και } f''(x) = 8\frac{-1}{x^6}\cdot 3x^2 = -\frac{24}{x^4}$$

απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$
- κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

Επιπλέον,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-4\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2} = 0\text{, οπότε } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

άρα η $y = 4$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Ομοίως βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία Α, Β είναι κάθετες, τότε έχουμε $f'(x_1)f'(x_2) = -1$ και

$$f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Rightarrow \frac{8}{x_1^3}\cdot\frac{8}{x_2^3} = -1 \Rightarrow (x_1x_2)^3 = -64 \Rightarrow x_1x_2 = -4$$

γ) i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = 4(α-1),\ α > 1$ και

$$E(Ω_2) = \int_1^α\left(4 - \frac{4}{x^2}\right)dx = 4(α-1) + 4\left[\frac{1}{x}\right]_1^α = 4α - 4 + \frac{4}{α} - 4 = \frac{4}{α}(α^2 - 2α + 1) = \frac{4}{α}(α-1)^2$$

οπότε

$$E(Ω_1) = (ΑΒΓΔ) - E(Ω_2) = 4(α-1) - \frac{4}{α}(α-1)^2 = 4(α-1)\left(1 - 1 + \frac{1}{α}\right) = \frac{4}{α}(α-1)$$

ii. Είναι:

$$E(Ω_1) = E(Ω_2) \Leftrightarrow \frac{4}{α}(α-1)^2 = \frac{4}{α}(α-1) \overset{α>1}{\Leftrightarrow} α - 1 = 1 \Leftrightarrow α = 2$$

Επομένως τα δυο χωρία είναι ισεμβαδικά μόνο όταν $α = 2$.