ΛΥΣΗ

α) i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2+5, x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, $f(0)=-2<0$ και $f(1)=1+5-2=4>0$, οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_o\in(0,1)$, μοναδικό λόγω της μονοτονίας της f, ώστε $f(x_o)=0$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1).

ii. Ισχύει: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{17}{8}>0$ και $f(0)=-2<0$, οπότε $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Επομένως το διάστημα στο οποίο περιέχεται το x_o περιορίζεται στο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ οπότε ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 παρά στο 1.

β) Ο αριθμός θ είναι θετικός, οπότε έχουμε:

$$x_o-\theta<x_o<x_o+\theta\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_o-\theta)<f(x_o)<f(x_o+\theta)\Rightarrow f(x_o-\theta)<0<f(x_o+\theta)$$

απ' όπου προκύπτει ότι: $\frac{f(x_o+\theta)}{f(x_o-\theta)}<0$, (1).

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)x^3}{f(x_o-\theta)x}=\frac{f(x_o+\theta)}{f(x_o-\theta)}\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2=-\infty$$

λόγω της (1).

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-4=8(x-1)\Rightarrow y=8x-4$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και ισχύει $f''(x)=6x>0$, για κάθε $x\in(1,2)$. Άρα η f είναι κυρτή, οπότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $A(1,4)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι:

$$E=\int_1^2[f(x)-(8x-4)]dx=\int_1^2(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=$$

$$=4-3\cdot 2+4-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{5}{4}$$