ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν $1-e^{-x}>0$. Επειδή,

$$1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^{-x}<1 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$$

έχουμε $\mathbb{D}_f=(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$-x_1>-x_2 \Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Rightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \Rightarrow 1-e^{-x_1}<1-e^{-x_2}$$
$$\Rightarrow \ln\left(1-e^{-x_1}\right)<\ln\left(1-e^{-x_2}\right) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε αντιστρέφεται.

β) Έστω $f(x)=y$, $x>0$. Τότε έχουμε:

$$\ln\left(1-e^{-x}\right)=y \Leftrightarrow 1-e^{-x}=e^{y} \Leftrightarrow e^{-x}=1-e^{y} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=\ln(1-e^{y}) \\ 1-e^{y}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\ln(1-e^{y}) \\ y<0 \end{cases}$$

όπου προφανώς $x>0$, αφού $\ln\left(1-e^{y}\right)<0$. Άρα $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^{x}\right)$, $x<0$.