ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει

$\frac{x^2+1}{e^x} \geq e^{-x} \Leftrightarrow x^2+1 \geq e^x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow x^2+1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$, ισχύει.

Το ίσον αν και μόνον αν $x=0$.

β)

(i) Από την εκφώνηση έχουμε τα σημεία $\Delta(0, f(x))$ και $Z(0, g(x))$.

Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι $E(x) = (B\Gamma Z\Delta) = (B\Gamma) \cdot (\Gamma Z) = (f(x) - g(x)) \cdot x$, άρα

$E(x) = x\left(\frac{x^2+1}{e^x} - e^{-x}\right) = x \cdot \frac{x^2+1-1}{e^x} = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(ii) Για κάθε $x > 0$ έχουμε $E'(x) = \frac{(x^3)' e^x - x^3 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^2 e^x (3-x)}{(e^x)^2} = \frac{x^2}{e^x}(3-x)$.

Άρα, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	0		3		$+\infty$
$E'(x)$		$+$		$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Έτσι για $x=3$ το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ μεγιστοποιείται.

γ) Αφού $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [ln2, 1]$ και $h(x)$ συνεχής, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$E = \int_{ln2}^{1} h(x)dx = \int_{ln2}^{1} xe^{-x}dx = \int_{ln2}^{1} x(-e^{-x})'dx = [-xe^{-x}]_{ln2}^{1} + \int_{ln2}^{1}(x)' e^{-x}dx =$

$-e^{-1} + \frac{ln2}{e^{ln2}} + [-e^{-x}]_{ln2}^{1} = -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{2} - \left(e^{-1} - \frac{1}{e^{ln2}}\right) = -\frac{1}{e} + \frac{ln2}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{1+ln2}{2} - \frac{2}{e}$

$= \frac{1}{2}\ln(2e) - \frac{2}{e} = ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.