

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ , ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z .

(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογώνιου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)