ΛΥΣΗ

α)

- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{lnx}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\mathrm{lnx}}\,\mathrm{x}\right) = 0 \cdot 0 = 0,$

Διότι $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{lnx} = -\infty$, άρα $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{lnx}} = 0$.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{\mathrm{lnx}}\, x\right) = -\infty,$

Διότι, $\lim_{x\to 1^-} lnx = 0$ και $\mathrm{lnx} < 0$ για $\mathrm{x} \in (0,1)$ οπότε $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{\mathrm{lnx}}\right) = -\infty$

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{lnx}}\right) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\mathrm{lnx}}\, x\right) = +\infty.$

Διότι, $\lim_{x\to 1^+} lnx = 0$ και $\mathrm{lnx} > 0$ για $\mathrm{x} > 1$ οπότε $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\mathrm{lnx}}\right) = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{lnx}}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\mathrm{x})'}{(\mathrm{lnx})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{x} = +\infty.$

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $\mathrm{x} \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$f'(\mathrm{x}) = \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{lnx}}\right)' = \frac{\mathrm{lnx}-1}{\mathrm{ln}^2\mathrm{x}}$, για κάθε $\mathrm{x} \in (0,1)\cup(1,+\infty)$.

$$f'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{lnx} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = e$$

Για κάθε $\mathrm{x} \in (0,1)$ $\mathrm{lnx} < 0$ και $\mathrm{lnx} - 1 < -1 < 0$, ενώ $\mathrm{ln}^2\mathrm{x} > 0$, οπότε $f'(\mathrm{x}) < 0$ και η f είναι συνεχής στο (0, 1), άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1).

Στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι $f'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{lnx}-1}{\mathrm{ln}^2\mathrm{x}}$, με $f'(\mathrm{x}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{lnx} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} > e$.

Οπότε, για κάθε $\mathrm{x} \in [e, +\infty)$ και f συνεχής με $f'(\mathrm{x}) > 0$ για κάθε $\mathrm{x} \in (e, +\infty)$, οπότε f γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$. Αντίστοιχα,

$f'(\mathrm{x}) < 0$ για κάθε $\mathrm{x} \in (1, e)$ και f συνεχής στο (1, e], οπότε f γνησίως φθίνουσα στο (1, e].

x	0	1	e	$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	↘	↘		↗

ii. Στο $Δ_1$ = (0, 1) η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτό , οπότε $f(Δ_1) = (\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)) = (-\infty, 0)$, διότι

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (από α ερώτημα).

Στο $Δ_2$ = (1, e] η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτό , οπότε

$f(Δ_2) = [f(e), \lim_{x\to 1^+} f(x)) = [e, +\infty)$, διότι

$f(e) = \frac{e}{lne}$ =e και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ (από α ερώτημα).

Στο $Δ_3$ = [e, +∞) η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε αυτό , οπότε $f(Δ_3) = [f(e), \lim_{x\to +\infty} f(x)) = [e, +\infty)$, διότι

$f(e) = \frac{e}{lne}$ =e και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (από α ερώτημα).

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(Δ_1) \cup f(Δ_2) \cup f(Δ_3) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$.

γ) Για κάθε $x > 0$ η εξίσωση $e^x = x^a$ γράφεται ισοδύναμα $\ln e^x = ln x^a \Leftrightarrow x = a\ln x$.

Αν $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\frac{x}{\ln x} = α \Leftrightarrow f(x) = α$, με την f ορισμένη για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Η τιμή x = 1 δεν αποτελεί λύση της εξίσωσης $e^x = x^a$, αφού για x=1 προκύπτει e =1 (άτοπο).

Οι λύσεις της εξίσωσης $e^x = x^a$ είναι τελικά οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = α.

Η f ορίζεται για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$.

- Για κάθε $α \in [0, e)$ η εξίσωση f(x) = α είναι αδύνατη, αφού το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
- Αν το $α \in (-\infty, 0) = f(Δ_1)$, τότε η εξίσωση f(x) = α έχει μία τουλάχιστον λύση στο $Δ_1$= (0, 1) και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $Δ_1$, έχει ακριβώς μία λύση στο $Δ_1$.
- Αν το $α \in (e, +\infty) \subseteq f(Δ_2) = f(Δ_3)$, τότε η εξίσωση f(x) = α έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1, e) και μια τουλάχιστον λύση στο (e, +∞). Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα $Δ_2$ = (1, e] έχει ακριβώς μία λύση στο (1, e). Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο (e, +∞), οπότε έχει μία ακριβώς λύση στο (e, +∞).
- Για α = e η εξίσωση f(x) = α έχει μια λύση, την τιμή x= e.

Συμπερασματικά για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^x = x^a$, για τις διάφορες τιμές του α έχουμε :

καμία λύση για κάθε $0 \leq$ α < e,

μία λύση που ανήκει στο $(0,1)$, για κάθε α$<$ 0,

δύο λύσεις, μία στο (1, e) και μία στο (e, +∞) για κάθε α > e,

μια λύση την x= e για α=e.