ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → ℝ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)