ΛΥΣΗ

α)

i. Για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Leftrightarrow$ $g(x_1) < g(x_2)$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και ένα προς ένα, οπότε είναι αντιστρέψιμη.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = y \Leftrightarrow y = 2x-1 \Leftrightarrow 2x = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Οπότε $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β)

i. Είναι $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$ θέλουμε :

$$\left\{x \in D_{g^{-1}} \; \kappa\alpha\iota \; g^{-1}(x) \in D_f\right\} \text{ ή}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} \; \kappa\alpha\iota \; \frac{x+1}{2} \in (2, +\infty)\right\} \text{ ή}$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} \; \kappa\alpha\iota \; \frac{x+1}{2} > 2\right\} \text{ ή } \quad x > 3.$$

ii. Για κάθε $x \in (3, +\infty)$ έχουμε :

$(f \circ g^{-1})(x) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{2} - 2\right) + 5 = \ln\left(\frac{x+1-4}{2}\right) + 5 = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right) + 5.$