ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι: $\left|\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \dfrac{|1-\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \dfrac{2}{|x|}$,

άρα $-\dfrac{2}{|x|} \le \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \dfrac{2}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{|x|}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|x|}$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

ii. Επίσης για $x \ne 0$ ισχύει: $xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$xf(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x + x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} + x\eta\mu\dfrac{1}{x}$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0 - 1 = -1$, γιατί λόγω του ερωτήματος (α, i) το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\gamma\iota\alpha\ x\to+\infty\ \tau o\ u\to 0}{\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

β) Από τα δεδομένα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα το $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (1).

Επίσης λόγω του ερωτήματος (α) για $x \ne 0$ ισχύει: $f(x) = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} + x\eta\mu\dfrac{1}{x}$ (2).

Λόγω της (2) είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} + x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} + \lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0 + 0 = 0$, εφόσον $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ (βασικό όριο) και $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0$, γιατί για $x \ne 0$ ισχύει: $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| = |x|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$ άρα: $-|x| \le x\eta\mu\dfrac{1}{x} \le |x|$ και $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}|x|$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι: $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0$. Επομένως λόγω της (1) το $f(0) = 0$.

γ) Εφόσον λόγω του ερωτήματος (α, ii) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ < 0, θα υπάρχει $\kappa > 0$ με $\kappa > \frac{1}{\pi}$ τέτοιος ώστε $f(\kappa) < 0$ (3).

Λόγω της (2), θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} + x\eta\mu\frac{1}{x}$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{\pi},\ \kappa\right]$ όπου αυτή είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης:

$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} + \frac{1}{\pi}\eta\mu\frac{1}{\frac{1}{\pi}} = \pi\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right) + \eta\mu\pi = \pi\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right) > 0$ (4),

γιατί ισχύει: $0 < \frac{1}{\pi} < 2\pi$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi} < 1 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi} > 0$.

Λόγω των (3), (4) το $f\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot f(\kappa) < 0$ και από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{\pi}, \kappa\right) \subseteq \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$, έτσι ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.