

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

(Μονάδες 4)

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0.$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{\pi}, +\infty \right).$$

(Μονάδες 7)