

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  με  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ . Έστω  $x_1, x_2 \in D_f$  ώστε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_2 = 1-x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ οπότε η συνάρτηση } f$$

είναι '1-1' επομένως αντιστρέφεται.

Για την εύρεση του τύπου της αντιστρόφου γνωρίζουμε ότι  $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ .

Οπότε για  $x \in D_f$ , θέτουμε  $y = f(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ , παίρνοντας τους περιορισμούς για το  $y$ , που θα ορίσουν το σύνολο τιμών της  $f$ , που αποτελεί το πεδίο ορισμού της αντιστρόφου. Είναι για  $x \neq 1$  (1):

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{y}, y \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{y}, y \neq 0, \text{ που ικανοποιεί την (1) } \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y-1}{y}, y \neq 0. \text{ Επομένως } f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}, y \neq 0 \text{ ή } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}, x \neq 0.$$

β) Για την  $f \circ f$  είναι:  $A_1 = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) \in \mathbb{R} - \{1\}\} =$

$$\left\{x \neq 1 : \frac{1}{1-x} \neq 1\right\} = \{x \neq 1 : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0,1\} \neq \emptyset, \text{ οπότε ορίζεται η σύνθεση } f \circ f$$

$$\text{με τύπο: } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x} \text{ με}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

γ) Λόγω των ερωτημάτων (α), (β) έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x} \text{ με } D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ και}$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x} \text{ με } D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0,1\} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty).$$

Εφόσον  $D_{f^{-1}} \neq D_{f \circ f}$ , οι συναρτήσεις  $f \circ f$  και  $f^{-1}$  δεν είναι ίσες. Επομένως δεν συμφωνούμε με τον ισχυρισμό του μαθητή.

δ) Είναι:

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \int_2^3 \frac{x-1}{x} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[x - \ln|x|\right]_2^3 = (3 - \ln 3) - (2 - \ln 2) = 1 + \ln 2 - \ln 3.$$