ΛΥΣΗ

α) Για την $f$ : $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, άρα $D_f = [-1, +\infty)$.

Επίσης το $D_g = \mathbb{R}$ γιατί η $g$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

β) Είναι $\mathrm{A}_1 = \left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 2-x \in [-1, +\infty)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 2-x \geq -1\right\} =$

$\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\right\} = (-\infty,\ 3] \neq \varnothing$, επομένως ορίζεται η $f \circ g$ και έχει τύπο:

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = \sqrt{g(x)+1} - 1 = \sqrt{2-x+1} - 1 = \sqrt{3-x} - 1$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) είναι $\varphi(x) = \sqrt{3-x} - 1$ με $\mathrm{A} = (-\infty, 3]$.

Η $\varphi$ είναι συνεχής στο $\mathrm{A}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η $\varphi$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 3)$ με

$$\varphi'(x) = (\sqrt{3-x} - 1)' = \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot (3-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0,$$

άρα η $\varphi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A} = (-\infty, 3]$, επομένως «1-1», οπότε αντιστρέψιμη.

Επίσης το $\varphi(\mathrm{A}) = [\varphi(3), \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)) = [-1, +\infty)$

γιατί $\varphi(3) = \sqrt{3-3} - 1 = -1$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{3-x} - 1) = +\infty$.

Επομένως ορίζεται $\varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$ ή $\varphi^{-1} : [-1, +\infty) \to (-\infty, 3]$.

Για την εύρεση του τύπου της αντιστρόφου της $\varphi$ θέτουμε

$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{3-x} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = y+1 \Leftrightarrow 3-x = (y+1)^2 \Leftrightarrow x = 3-(y+1)^2$,

επομένως $\varphi^{-1}(x) = 3-(x+1)^2$.