ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\begin{cases} 9x^2+16>0 \\ 8x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{8}$ οπότε $D_f=\left(-\dfrac{1}{8},\ +\infty\right)$.

Επίσης για $x\in D_f$:

η συνάρτηση $\sqrt{9x^2+16}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $9x^2+16$ και $\sqrt{x}$,

η συνάρτηση $\dfrac{5}{2}\ln(8x+1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $8x+1$ και $\dfrac{5}{2}\ln x$.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

β) Είναι: $f(0)=\sqrt{16}-\dfrac{5}{2}\ln 1=4>0$.

Επίσης: $f(1)=\sqrt{9+16}-\dfrac{5}{2}\ln 9=\sqrt{25}-\dfrac{5}{2}\ln 3^2=5-2\dfrac{5}{2}\ln 3=5(1-\ln 3)<0$

γιατί $e<3\Leftrightarrow \ln e<\ln 3\Leftrightarrow 1<\ln 3\Leftrightarrow 1-\ln 3<0$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\,1]$.

Λόγω του ερωτήματος (β) για τη συνάρτηση f ισχύει $f(0)\cdot f(1)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,\,1)$: $f(\rho)=0$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.