ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f είναι: $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$, οπότε $D_f = \mathbb{R}^*$.

Για τη συνάρτηση g είναι:

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, οπότε $D_g = (-1,1)$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $D_g = (-1,1)$.

Για την $f \circ g$ το πεδίο ορισμού είναι το:

$$\mathrm{A}_1 = \left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in (-1,1) : g(x) \in \mathbb{R}^*\right\} = \left\{x \in (-1,1) : \ln\frac{1-x}{1+x} \neq 0\right\} =$$

$$\left\{x \in (-1,1) : \frac{1-x}{1+x} \neq 1\right\} = \left\{x \in (-1,1) : 1-x \neq 1+x\right\} = \left\{x \in (-1,1) : x \neq 0\right\} = (-1,0) \cup (0,1).$$

γ) Για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ είναι: $(f \circ g)(x) = \left(f(g(x)\right) = f\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right) =$

$$\frac{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}} + 1}{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}} - 1} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + 1}{\frac{1-x}{1+x} - 1} = \frac{\frac{1-x+1+x}{1+x}}{\frac{1-x-1-x}{1+x}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

Άρα $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (-1,0) \cup (0,1)$.