ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση g είναι:

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot(1+x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, οπότε $D_g = (-1,1)$.

β) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και λόγω του ερωτήματος (α) το $D_g = (-1,1)$.

Για την $f\circ g$ το πεδίο ορισμού είναι το:

$$\mathrm{A}_1 = \left\{x\in D_g : g(x)\in D_f\right\} = \left\{x\in(-1,1) : g(x)\in\mathbb{R}^*\right\} = \left\{x\in(-1,1) : \ln\frac{1-x}{1+x}\neq 0\right\} =$$

$$\left\{x\in(-1,1) : \frac{1-x}{1+x}\neq 1\right\} = \left\{x\in(-1,1) : 1-x\neq 1+x\right\} = \left\{x\in(-1,1) : x\neq 0\right\} = (-1,0)\cup(0,1).$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), για $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ είναι:

$$(f\circ g)(x) = \left(f(g(x)\right) = \frac{e^{g(x)}+1}{e^{g(x)}-1} = \frac{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}+1}{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}-1} = \frac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1} = \frac{\frac{1-x+1+x}{1+x}}{\frac{1-x-1-x}{1+x}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

Άρα $(f\circ g)(x) = -\frac{1}{x}$ με $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.