ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f είναι $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$, οπότε $D_f = [-3,3]$.

Για τη συνάρτηση g είναι $4-x^2 \geq 0$ και $x \neq 0$ $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ και $x \neq 0$, οπότε $D_g = [-2,0) \cup (0,2]$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο δύο συναρτήσεων ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού τους, οπότε: $D_f \cap D_g = [-3,3] \cap [-2,0) \cup (0,2] = [-2,0) \cup (0,2]$.

Για $x \in [-2,0) \cup (0,2]$ είναι: $f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9-x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο δύο συναρτήσεων $\dfrac{f}{g}$ ορίζεται στην τομή των πεδίων ορισμού τους, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$. Λόγω του ερωτήματος (β, i) το $D_f \cap D_g = [-2,0) \cup (0,2]$ και $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$.

Επομένως η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ ορίζεται στο $(-2,0) \cup (0,2)$.

Για $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ είναι: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}} = \dfrac{x\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$.