ΛΥΣΗ

α)

i. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2-x)$ και $f''(x) = -6x + 6$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x(2-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$, πρόσημο τριωνύμου.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 2$ και επειδή $x \in [0,+\infty)$, έχουμε $x > 2$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	2 $+\infty$
f'	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο άκρο του διαστήματος $x_1 = 0$ το $f(0) = 1$ και μέγιστο στο $x_2 = 2$ το $f(2) = 5$. Οπότε $A(0,1)$ και $B(2,5)$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -6x + 6 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1 $+\infty$
f''	+	-
f		

Η f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $[0,1]$ και κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[1,+\infty)$. Σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι το $\Gamma(1, f(1))$.

Άρα η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 1$, ένα μέγιστο, το $f(2) = 5$ και ένα σημείο καμπής το $\Gamma(1,3)$.

ii. Το μέσο του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ή (1,3) που είναι οι συντεταγμένες τους σημείου Γ. Επίσης τα σημεία Α,Γ,Β είναι συνευθειακά, αφού $\lambda_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-5}{0-2}=2$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{3-5}{1-2}=2$.

β) Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι: $y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-1=2(x-0)$ ή

$$y=2x+1$$

Η σχετική θέση της ευθείας ΑΒ ως προς την C_f θα βρεθεί, υπολογίζοντας το πρόσημο της διαφοράς

$$\begin{aligned} f(x)-y&=-x^3+3x^2+1-2x-1\\ &=-x^3+3x^2-2x\\ &=-x(x^2-3x+2)\\ &=-x(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

x	0	1	2	$+\infty$
$-x$		-	-	-
$(x-1)(x-2)$		+	-	+
$-x(x-1)(x-2)$		-	+	-

Άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ΑΒ στο διάστημα $[0,1]$ και πάνω από αυτήν στο $[1,2]$.

Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία ΑΒ και τις κατακόρυφες ευθείες x=0 και x=1 και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία ΑΒ τη C_f και τις κατακόρυφες ευθείες x=1 και x=2 , τότε:

$$E_1=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

$$E_2=\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=-4+8-4+\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

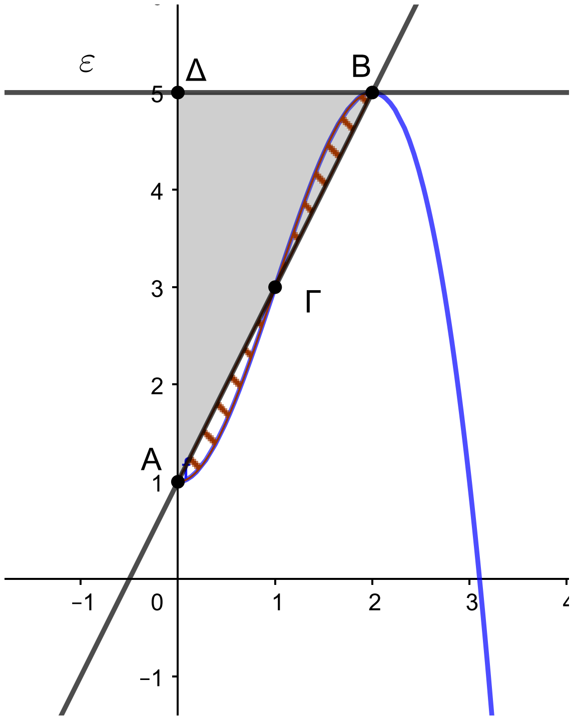
Άρα $E_1=E_2=\frac{1}{4}$.

γ) Στο σημείο Β(2,5) η f παρουσιάζει μέγιστο, οπότε από το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(2)=0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Β είναι η ευθεία ε με εξίσωση $y=5$ που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Δ(0,5).

Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι η ευθεία AB βρίσκεται κάτω από τη C_f στο διάστημα $[0,1]$ και πάνω από αυτήν στο $[1,2]$.

Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία ε, τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα y'y, τότε $\mathrm{E} = (\mathrm{AB\Delta}) + \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 = (\mathrm{AB\Delta})$, αφού $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα y'y.



Εναλλακτική λύση:

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές ΑΔ= $y_\Delta - y_A = 5 - 1 = 4$ και ΒΔ=2.

Επομένως $(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ τ.μ.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα y'y είναι

$$\mathrm{E} = \int_0^2 (5 - (-x^3 + 3x^2 + 1))dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 4)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_0^2 =$$

$$= 4 - 8 + 8 = 4 \text{ τ.μ.}$$

Άρα Ε=(ΑΒΔ).