ΛΥΣΗ

α) $\begin{cases} f(x)=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+1=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{3} \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x<0 \end{cases}$ μοναδική αρνητική ρίζα της εξίσωσης. Άρα $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[3,4]$ ως πολυωνυμική.

$\left.\begin{matrix} f(3)=-3^3+3\cdot 3^2+1=1>0 \\ f(4)=-4^3+3\cdot 4^2+1=-15<0 \end{matrix}\right\}$. Άρα $f(3)\cdot f(4)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2\in(3,4)$, με $x_2>0$.

Θα αποδείξουμε ότι και η ρίζα x_2 είναι μοναδική.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, γιατί:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-3x^2+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x^3+3x^2+1)=1$$

$$\text{και } f(0)=1$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\begin{cases} -6x, x<0 \\ -3x^2+6x, x>0 \end{cases}$$

- $\begin{cases} x>0 \\ f'(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -3x^2+6x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3x(2-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<x<2 \end{cases}$.
- Άρα $f'(x)<0$ για $x>2$.

Οπότε για $0<x<2$ θα ισχύει $f(0)<f(x)<f(2)$ ή $1<f(x)<5$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $[0,2]$. Επίσης λόγω μονοτονίας της f στο $[2,+\infty)$, η ρίζα $x_2\in(3,4)\subseteq[2,+\infty)$ είναι μοναδική γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα τελικά η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1,x_2 με $x_1<0$ και $x_2>3$.

β)

i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $x_1<0<x_2$. Θα εξετάσουμε αν η f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

   Αρχικά, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ και συνεχής και στο 0, όπως αποδείξαμε στο α) ερώτημα. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[x_1,x_2]$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-3x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x^2+3x)=0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$

Οπότε η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και $f(x_1)=f(x_2)=0$, αφού τα x_1,x_2 είναι οι ρίζες της $f(x)=0$. Δηλαδή πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]$.

ii. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

$$\begin{cases} f'(\xi)=0 \\ x_1<\xi<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\xi=0 \\ x_1<\xi<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi=0, \text{απορρίπτεται} \\ x_1<\xi<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(\xi)=0 \\ 0\le\xi<x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\xi^2+6\xi=0 \\ 0\le\xi<x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi=0 \text{ ή } \xi=2 \\ 0\le\xi<x_2 \end{cases}.$$

Άρα τα $\xi\in(x_1,x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$ είναι τα $\xi_1=0$ και $\xi_2=2$ και είναι μοναδικά γιατί η εξίσωση $-3\xi^2+6\xi=0$ είναι 2ου βαθμού και έχει 2 ρίζες άνισες.

γ) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	+	-	
f	↗	↗	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=5$. Άρα $f(x)\le 5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

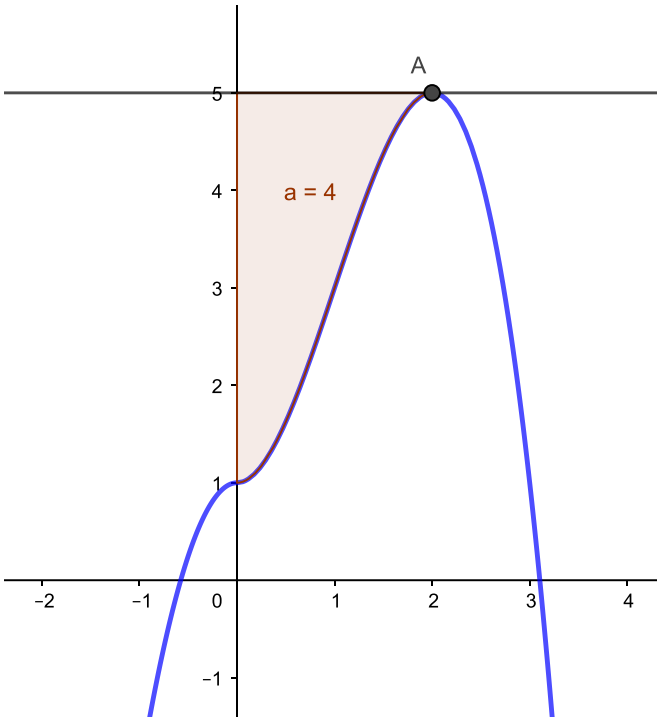
Η εφαπτομένη ευθεία ε της C_f στο σημείο M(2,5) έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2)=0$, οπότε η εξίσωσή της είναι $y=5$.

Αν $g(x)=5$, τότε επειδή $f(x)\le 5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, της g και την ευθεία x=0 είναι

$$E=\int_0^2\big(g(x)-f(x)\big)dx=\int_0^2(5+x^3-3x^2-1)dx=\int_0^2(x^3-3x^2+4)dx=$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_0^2=4-8+8=4 \text{ τ.μ.}$$

Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.


A
a = 4
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
1
2
3
4