ΛΥΣΗ

α) μοναδική αρνητική ρίζα της εξίσωσης. Άρα .

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα ως πολυωνυμική.

. Άρα , οπότε από το θεώρημα Bolzano η έχει μία τουλάχιστον ρίζα , με .

Θα αποδείξουμε ότι και η ρίζα είναι μοναδική.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0, γιατί:

και

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο και στο ως πολυωνυμική με

* .
* Άρα για .

Οπότε για θα ισχύει ή . Δηλαδή η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο . Επίσης λόγω μονοτονίας της στο η ρίζα είναι μοναδική γιατί η είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα τελικά η έχει δύο ακριβώς ρίζες τις με και .

β)

1. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι . Θα εξετάσουμε αν η ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα .

Αρχικά, η είναι συνεχής στο , αφού είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο και στο και συνεχής και στο 0, όπως αποδείξαμε στο α) ερώτημα. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος .

Άρα η είναι παραγωγίσιμη στο 0 με

Οπότε η είναι συνεχής στο , παραγωγίσιμη στο ( και  
, αφού τα είναι οι ρίζες της . Δηλαδή πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο .

1. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον , τέτοιο ώστε .

.

Άρα τα για τα οποία ισχύει είναι τα και και είναι μοναδικά γιατί η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει 2 ρίζες άνισες.

γ) Η είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο και το πρόσημο της καθώς και η μονοτονία της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 2 | | |
| ’ | + | + | - |
|  | C:\Users\Alexia\AppData\Local\Temp\geogebra.emf | C:\Users\Alexia\AppData\Local\Temp\geogebra.emf | C:\Users\Alexia\AppData\Local\Temp\geogebra.emf |

H είναι γνησίως αύξουσα στο και γνησίως φθίνουσα στο . Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο το. Άρα για κάθε .

Η εφαπτομένη ευθεία ε της στο σημείο έχει συντελεστή διεύθυνσης , οπότε η εξίσωσή της είναι .

Αν , τότε επειδή για κάθε , το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της , της και την ευθεία x=0 είναι

τ.μ.

Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.

C:\Users\Alexia\AppData\Local\Temp\geogebra.emf