ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

(Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)