ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in(-96,96)$ είναι:

$$g'(x)=\left(e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}\right)'=e^{\frac{x}{96}}\cdot\left(\frac{x}{96}\right)'+e^{-\frac{x}{96}}\cdot\left(-\frac{x}{96}\right)'=\frac{e^{\frac{x}{96}}-e^{-\frac{x}{96}}}{96}.$$

Έχουμε:

- $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{x}{96}}-e^{-\frac{x}{96}}}{96}>0\Leftrightarrow e^{\frac{x}{96}}>e^{-\frac{x}{96}}\Leftrightarrow\frac{x}{96}>-\frac{x}{96}\overset{x\in(-96,96)}{\Leftrightarrow}x\in(0,96)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,96]$ έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,96]$.
- $g'(x)<0\overset{x\in(-96,96)}{\Leftrightarrow}x\in(-96,0)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[-96,0]$ έπεται ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-96,0]$.
- $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-96,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,96]$ έπεται ότι παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$, τοπικό ελάχιστο, το $g(0)=e^0+e^0=2$.
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-96,96]$ άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του πεδίου ορισμού. Επειδή κρίσιμο σημείο έχουμε μόνο στο $x_0=0$ και οι τιμές στα άκρα είναι $g(96)=e^{\frac{96}{96}}+e^{-\frac{96}{96}}=e+e^{-1}$ και $g(-96)=e^{-\frac{96}{96}}+e^{\frac{96}{96}}=e^{-1}+e$ έπεται ότι η ελάχιστη τιμή της g είναι το 2 και η μέγιστη τιμή το $e^{-1}+e$.

β)

i. Από τον ορισμό του μεγίστου ισχύει $g(x)\le e^{-1}+e$ για κάθε $x\in[-96,96]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=96$ ή $x=-96$.
Άρα με $\alpha>0$ και για κάθε $x\in(-96,96)$ έχουμε:
$$g(x)<g(96)\Rightarrow g(96)-g(x)>0\Rightarrow 2\alpha\big(g(96)-g(x)\big)>0\Rightarrow f(x)>0.$$

ii. Για κάθε $x\in(-96,96)$ έχουμε: $f'(x)=2\alpha\big(g(96)-g(x)\big)'=-2\alpha g'(x)$.
Από το α ερώτημα έχουμε ότι:
- για $x\in(0,96)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow -2\alpha g'(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$,
- για $x\in(-96,0)$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow -2\alpha g'(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$,
- $f'(x)=0\Leftrightarrow -2\alpha g'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής από τα παραπάνω προκύπτει ότι: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-96,0\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,96\right]$ και παρουσιάζει στη θέση $x_0=0$ τοπικό μέγιστο, το $f\left(0\right)=2\alpha\left(g\left(96\right)-g\left(0\right)\right)=2\alpha\left(e+e^{-1}-2\right)$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο.

Το πλάτος της αψίδας του Σεντ Λούις είναι ίσο με $96-\left(-96\right)=192$ και το ύψος της είναι ίσο με $f\left(0\right)$. Επειδή το ύψος της αψίδας του Σεντ Λούις ισούται με το πλάτος της, έχουμε ότι:

$$2\alpha\left(e+e^{-1}-2\right)=192 \Leftrightarrow \alpha=\frac{192}{2\left(e+e^{-1}-2\right)} \Leftrightarrow \alpha=\frac{96}{e+e^{-1}-2}.$$