ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής ως άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in \left(-96,96\right)$ είναι:

$g^{'}\left(x\right)=\left(e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}\right)^{'}=e^{\frac{x}{96}}⋅\left(\frac{x}{96}\right)^{'}+e^{-\frac{x}{96}}⋅\left(-\frac{x}{96}\right)^{'}=\frac{e^{\frac{x}{96}}-e^{-\frac{x}{96}}}{96}$.

Έχουμε:

* $g^{'}\left(x\right)>0⇔\frac{e^{\frac{x}{96}}-e^{-\frac{x}{96}}}{96}>0⇔e^{\frac{x}{96}}>e^{-\frac{x}{96}}⇔\frac{x}{96}>-\frac{x}{96} \overset{x\in \left(-96,96\right)}{⇔} x\in \left(0,96\right)$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $\left[0,96\right]$ έπεται ότι η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,96\right]$.
* $g^{'}\left(x\right)<0 \overset{x\in \left(-96,96\right)}{⇔} x\in \left(-96,0\right)$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $\left[-96,0\right]$ έπεται ότι η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-96,0\right]$.
* $g^{'}\left(x\right)=0⇔x=0$ και επειδή η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-96,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,96\right]$ έπεται ότι παρουσιάζει στη θέση $x\_{0}=0$, τοπικό ελάχιστο, το $g\left(0\right)=e^{0}+e^{0}=2$.
* Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $\left[-96,96\right]$ άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του πεδίου ορισμού. Επειδή κρίσιμο σημείο έχουμε μόνο στο $x\_{0}=0$ και οι τιμές στα άκρα είναι $g\left(96\right)=e^{\frac{96}{96}}+e^{-\frac{96}{96}}=e+e^{-1}$ και $g\left(-96\right)=e^{-\frac{96}{96}}+e^{\frac{96}{96}}=e^{-1}+e$ έπεται ότι η ελάχιστη τιμή της $g$ είναι το $2$ και η μέγιστη τιμή το $e^{-1}+e$.

β)

1. Από τον ορισμό του μεγίστου ισχύει $g\left(x\right)\leq e^{-1}+e$ για κάθε $x\in \left[-96,96\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=96$ ή $x=-96$.

Άρα με και για κάθε $x\in \left(-96,96\right)$ έχουμε:

$$g\left(x\right)<g\left(96\right)⇒g\left(96\right)-g\left(x\right)>0⇒2α\left(g\left(96\right)-g\left(x\right)\right)>0⇒f\left(x\right)>0.$$

1. Για κάθε $x\in \left(-96,96\right)$ έχουμε: $f^{'}\left(x\right)=2α\left(g\left(96\right)-g\left(x\right)\right)^{'}=-2αg^{'}\left(x\right)$.

 Από το α ερώτημα έχουμε ότι:

* για $x\in \left(0,96\right)$ είναι $g^{'}\left(x\right)>0⇒ -2αg^{'}\left(x\right)<0⇒f^{'}\left(x\right)<0$,
* για $x\in \left(-96,0\right)$ είναι $g^{'}\left(x\right)<0⇒ -2αg^{'}\left(x\right)>0⇒f^{'}\left(x\right)>0$,
* $f^{'}\left(x\right)=0⇔-2αg^{'}\left(x\right)=0⇔g^{'}\left(x\right)=0⇔x=0$ .

Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής από τα παραπάνω προκύπτει ότι: η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-96,0\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,96\right]$ και παρουσιάζει στη θέση $x\_{0}=0$ τοπικό μέγιστο, το $f\left(0\right)=2α\left(g\left(96\right)-g\left(0\right)\right)=2α\left(e+e^{-1}-2\right)$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο.

Το πλάτος της αψίδας του Σεντ Λούις είναι ίσο με $96-\left(-96\right)=192$ και το ύψος της είναι ίσο με $f\left(0\right)$. Επειδή το ύψος της αψίδας του Σεντ Λούις ισούται με το πλάτος της, έχουμε ότι:

$2α\left(e+e^{-1}-2\right)=192⇔α=\frac{192}{2\left(e+e^{-1}-2\right)}⇔α=\frac{96}{e+e^{-1}-2}$.

