ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι συνεχής ως άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων.

Για κάθε είναι:

.

Έχουμε:

* και επειδή η είναι συνεχής στο έπεται ότι η είναι γνησίως αύξουσα στο .
* και επειδή η είναι συνεχής στο έπεται ότι η είναι γνησίως φθίνουσα στο .
* και επειδή η είναι γνησίως φθίνουσα στο και γνησίως αύξουσα στο έπεται ότι παρουσιάζει στη θέση , τοπικό ελάχιστο, το .
* Η συνάρτηση είναι συνεχής στο άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στα κρίσιμα σημεία ή στα άκρα του πεδίου ορισμού. Επειδή κρίσιμο σημείο έχουμε μόνο στο και οι τιμές στα άκρα είναι και έπεται ότι η ελάχιστη τιμή της είναι το και η μέγιστη τιμή το .

β)

1. Από τον ορισμό του μεγίστου ισχύει για κάθε με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν ή .

Άρα με και για κάθε έχουμε:



1. Για κάθε έχουμε: .

Από το α ερώτημα έχουμε ότι:

* για είναι ,
* για είναι ,
* .

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής από τα παραπάνω προκύπτει ότι: η είναι γνησίως αύξουσα στο , γνησίως φθίνουσα στο και παρουσιάζει στη θέση τοπικό μέγιστο, το , το οποίο είναι και ολικό μέγιστο.

Το πλάτος της αψίδας του Σεντ Λούις είναι ίσο με και το ύψος της είναι ίσο με . Επειδή το ύψος της αψίδας του Σεντ Λούις ισούται με το πλάτος της, έχουμε ότι:

.

