ΛΥΣΗ

α) Η f στο $[-3,-1]$ είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος $(-3,-1)$, αφού η C_f, βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Η f στο $[-1,0]$ είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος $(-1,0)$, αφού η C_f, βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Ομοίως η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (0,2)$, αφού η C_f, βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.

x	-3 -1	0	2
f'	+	+	-
f	↗	↗	↘

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,0]$, αφού είναι συνεχής στο -1 και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

β)

i. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [-3,2]. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία της που δεν ορίζεται η παράγωγός της f' και τα σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται.

   Από την υπόθεση έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1, οπότε το -1 είναι ένα κρίσιμο σημείο της f. Επίσης, από το σχήμα βλέπουμε ότι η f' μηδενίζεται στο 0, αφού η γραφική της παράσταση διέρχεται από το O(0,0). Επομένως και το σημείο 0 είναι ένα κρίσιμο σημείο της f.

ii. Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο διάστημα [-3,2] είναι τα κρίσιμα σημεία της και τα άκρα του διαστήματος [-3.2]. Το -1, αν και κρίσιμο σημείο της f, δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Ενώ το 0 είναι θέση τοπικού μεγίστου, αφού η f' μηδενίζεται σ' αυτό, αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά του 1 και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0] και γνησίως φθίνουσα στο [0,2]. Επίσης τα σημεία -3 και 2, που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της f, είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων.

γ) Η f' είναι συνεχής στο [0,2] και η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x στο διάστημα (0,2]. Οπότε, για το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f' , τον άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και x=2 έχουμε:

E= - $\int_0^2 f'(x)dx = -(-4) = 4$. Αλλά το χωρίο αυτό είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές που έχουν μήκος 2 και $|f'(2)|$. Επομένως E= $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |f'(2)|$ ή $4 = |f'(2)| \Leftrightarrow$ $f'(2) = -4$, αφού $f'(2) < 0$.